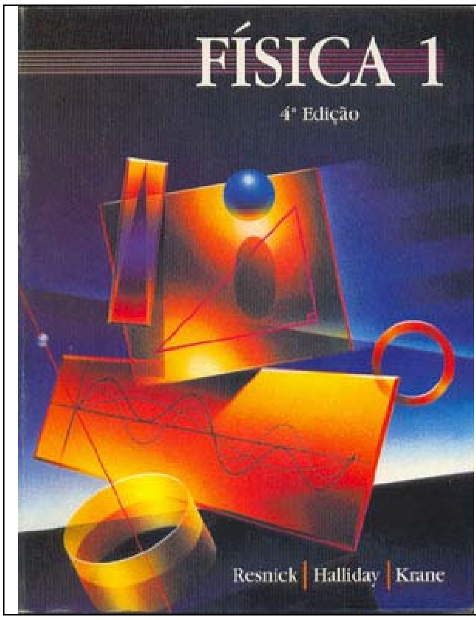
PROBLEMAS RESOLVIDOS DE FÍSICA

Prof. Anderson Coser Gaudio
Departamento de Física – Centro de Ciências Exatas – Universidade Federal do Espírito Santo
http://www.cce.ufes.br/anderson
anderson@npd.ufes.br **Última atualização: 21/07/2005 05:46 H**



RESNICK, HALLIDAY, KRANE, FÍSICA, 4.ED., LTC, RIO DE JANEIRO, 1996.

FÍSICA 1

Capítulo 13 - Momento Angular

Problemas

01	02	**03**	04	**05**	06	07	08	09	10
11	**12**	13	**14**	15	**16**	17	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	**27**	28	**29**	30
31	**32**	33	34	**35**	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46				

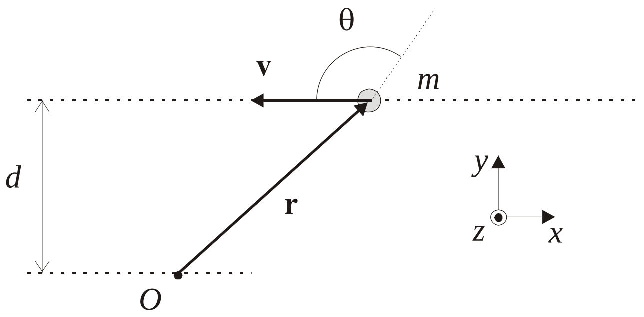
Problemas Resolvidos

03. Mostre que o momento angular, em relação a um ponto qualquer, de uma partícula que se move com velocidade uniforme, permanece constante durante o movimento.

(Pág. 268)

Solução.

Considere o seguinte esquema da situação:



O módulo do momento angular do sistema em relação a um ponto genérico O vale:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Na coordenada z:

$$l = rmv \operatorname{sen} \theta$$

O esquema mostra que:

$$r \operatorname{sen} \theta = d$$

Logo:

$$\boxed{l = mvd}$$

Como m, v e d são constantes, l também é constante.

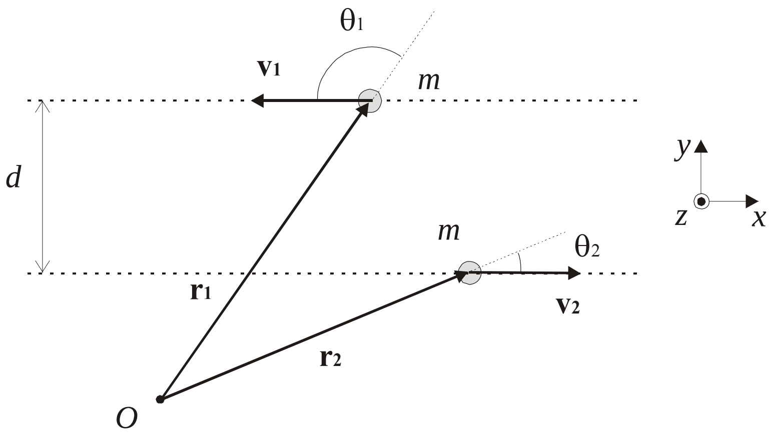
[Início]

05. Duas partículas de massa m e velocidade v deslocam-se, em sentido contrário, ao longo de duas retas paralelas separadas por uma distância d. Ache a expressão para o momento angular do sistema em relação a qualquer ponto.

(Pág. 269)

Solução.

Considere o seguinte esquema da situação, em que $v_1 = v_2 = v$:



O módulo do momento angular do sistema em relação a um ponto genérico O vale:

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$$

Na coordenada z:

$$L = r_1 mv \operatorname{sen}\theta_1 - r_2 mv \operatorname{sen}\theta_2$$

$$L = mv\left(r_1 \operatorname{sen}\theta_1 - r_2 \operatorname{sen}\theta_2\right)$$

$$\boxed{L = mvd}$$

[Início]

12. A Fig. 26 mostra duas rodas, A e B, ligadas por uma correia. O raio de B é três vezes maior do que o de A. Qual seria a razão dos momentos de inércia I_A/I_B, se (a) ambas tivessem o mesmo momento angular e (b) ambas tivessem a mesma energia cinética de rotação? Suponha que a correia não escorregue.

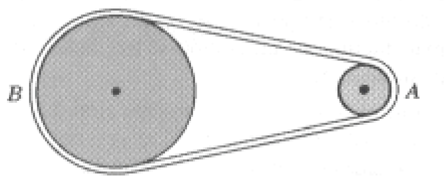


Fig. 26 Problema 12.

(Pág. 269)

Solução.

(a)

$$L_A = L_B$$

$$I_A\omega_A = I_B\omega_B$$

$$I_A \frac{v}{R_A} = I_B \frac{v}{R_B}$$

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{R_A}{R_B} = \frac{R_A}{3R_A}$$

$$\boxed{\frac{I_A}{I_B} = \frac{1}{3}}$$

(b)

$$K_{\text{Rot}A} = K_{\text{Rot}B}$$

$$\frac{1}{2} I_A\omega_A^2 = \frac{1}{2} I_B\omega_B^2$$

$$I_A\left(\frac{v}{R_A}\right)^2 = I_B\left(\frac{v}{R_B}\right)^2$$

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{R_A^2}{R_B^2} = \frac{R_A^2}{\left(3R_A\right)^2} = \frac{R_A^2}{9R_A^2}$$

$$\boxed{\frac{I_A}{I_B} = \frac{1}{9}}$$

[Início]

14. Ache o momento angular da Terra em sua rotação em torno do próprio eixo, utilizando os dados dos apêndices. Suponha que a Terra seja uma esfera uniforme.

(Pág. 269)

Solução.

Dentro da aproximação referida no enunciado, o momento angular da Terra vale:

$$L = Iw = \frac{2}{5}MR^2 \times \frac{2\pi}{T} \qquad (1)$$

Na Eq. (1), M e R são a massa e o raio da Terra e T é o período de rotação da Terra em torno do seu próprio eixo.

$$L = \frac{4\pi MR^2}{5T} = \frac{4\pi\left(5{,}98\times10^{24}\ \text{kg}\right)\left(6{,}37\times10^{6}\ \text{m}\right)^2}{5\left(24\ \text{h}\times3.600\ \dfrac{\text{s}}{\text{h}}\right)} = 7{,}0583\cdots\times10^{33}\ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

$$\boxed{L \approx 7{,}06\times10^{33}\ \text{kg.m}^2/\text{s}}$$

[Início]

16. A Fig. 27 mostra um corpo rígido simétrico girando em torno de um eixo fixo. Por conveniência, a origem das coordenadas é colocada no centro de massa. Divida o corpo em elementos de massa m_i e, somando as contribuições destes elementos para o momento angular, mostre que o momento angular total **L** = I**w**.

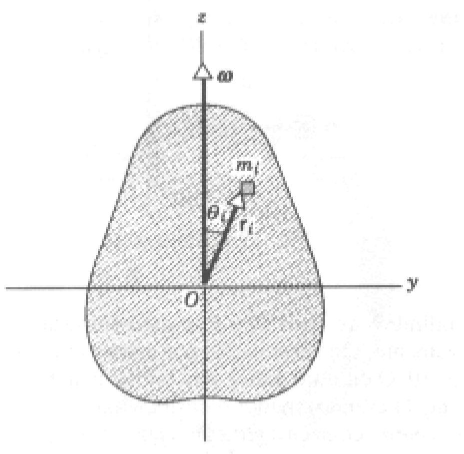
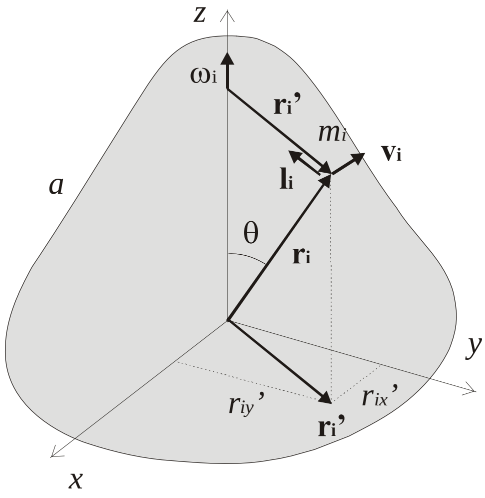


Fig. 27 Problema 16.

(Pág. 269)

Solução.

Vamos analisar o caso tridimensional, que é mais geral do que o apresentado na Fig. 27.



Seja m_i um elemento de massa do corpo M, r_i a localização, v_i a velocidade linear e l_i o momento linear de m_i. Logo:

$$\mathbf{l_i} = \mathbf{r_i} \times m_i \mathbf{v_i}$$

$$\mathbf{l_i} = \left(r_{xi}\mathbf{i} + r_{yi}\mathbf{j} + r_{zi}\mathbf{k} \right) \times m_i \left(v_{xi}\mathbf{i} + v_{yi}\mathbf{j} + v_{zi}\mathbf{k} \right)$$

Como o movimento circular é em torno do eixo z, a velocidade linear tem componentes apenas em x e y.

$$\mathbf{l_i} = -m_i r_{zi} v_{yi}\mathbf{i} + m_i r_{zi} v_{xi}\mathbf{j} + m_i \left(r_{xi} v_{yi} - r_{yi} v_{xi} \right)\mathbf{k} \tag{1}$$

A velocidade $\mathbf{v_i}$ do elemento de massa é dada por:

$$\mathbf{v_i} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_i^{'}} \tag{2}$$

Na Eq. (2), $\boldsymbol{\omega}$ é o mesmo para todos os elementos de massa. Multiplicando-se ambos os membros de (2) por $\mathbf{r_i^{'}}$:

$$\mathbf{r_i^{'}} \times \mathbf{v_i} = \mathbf{r_i^{'}} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_i^{'}} \right)$$

$$\mathbf{r_i^{'}} \times \mathbf{v_i} = \left(\mathbf{r_i^{'}}.\mathbf{r_i^{'}} \right)\boldsymbol{\omega} - \left(\mathbf{r_i^{'}}.\boldsymbol{\omega} \right)\mathbf{r_i^{'}}$$

O último termo entre parênteses é zero por se tratar de produto escalar entre vetores ortogonais. Logo:

$$\boldsymbol{\omega_i} = \frac{\mathbf{r_i^{'}} \times \mathbf{v_i}}{\mathbf{r_i^{'}}.\mathbf{r_i^{'}}}$$

$$\boldsymbol{\omega_i} = \frac{r_{xi} v_{yi} - r_{yi} v_{xi}}{r_{xi}^2 + r_{yi}^2}\mathbf{k} = \frac{r_{xi} v_{yi} - r_{yi} v_{xi}}{r_i^{'2}}\mathbf{k}$$

Eliminando-se a notação vetorial:

$$r_{xi} v_{yi} - r_{yi} v_{xi} = \omega r_i^{'2} \tag{3}$$

Substituindo-se (3) em (1):

$$\mathbf{l_i} = -m_i r_{zi} v_{yi}\mathbf{i} + m_i r_{zi} v_{xi}\mathbf{j} + m_i \omega r_i^{'2}\mathbf{k}$$

Somando-se os momentos angulares de todos os elementos de massa:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l_i} = -\sum m_i r_{zi} v_{yi}\mathbf{i} + \sum m_i r_{zi} v_{xi}\mathbf{j} + \sum m_i \omega r_i^{'2}\mathbf{k}$$

Por razões de simetria os dois primeiros termos do segundo membro resultam em zero. Portanto:

$$\mathbf{L} = \sum m_i \omega r_i^{'2}\mathbf{k} = \omega \sum m_i r_i^{'2}\mathbf{k}$$

$$\boxed{\mathbf{L} = I\omega\mathbf{k}}$$

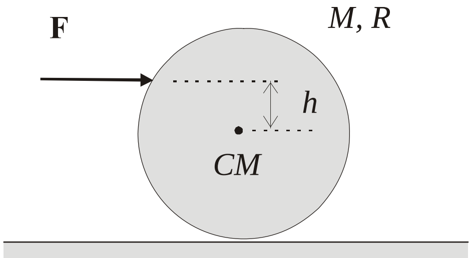
[Início]

19. Para fazer uma bola de bilhar rolar sem escorregar, deve-se bater com o taco exatamente a uma altura de $2R/5$ acima do centro, e não no centro da bola. Prove isso. (Para aprender mais a respeito da mecânica do bilhar, veja Arnold Sommerfeld, *Mechanics*, Academic Press, Orlando, pp. 158-161.)

(Pág. 270)

Solução.

Considere o esquema a seguir:



Forças em x:

$$\sum F_x = ma_x$$

$$F = Ma$$

$$a = \frac{F}{M} \qquad (1)$$

Torques em relação ao centro de massa da bola na coordenada z:

$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

$$-F.h = \frac{2}{5}MR^2.\alpha \qquad (2)$$

A condição para que a bola comece a rolar sem deslizar imediatamente após a tacada é:

$$\alpha = -\frac{a}{R} \qquad (3)$$

O sinal negativo em (3) corresponde ao fato de em x a aceleração linear a ser positiva e em z a aceleração angular ser negativa, de acordo com o referencial adotado. Substituindo-se (3) em (2):

$$h = \frac{2MRa}{5F} \qquad (4)$$

Substituindo-se (1) em (4):

$$\boxed{h = \frac{2R}{5}}$$

È interessante notar que a bola irá começar a rolar imediatamente após a tacada independentemente de haver ou não atrito entre a bola e a mesa.

[Início]

21. Uma barra de comprimento L e massa M repousa sobre uma mesa horizontal sem atrito. Um taco de hóquei de massa m movendo-se com velocidade v, como mostra a Fig. 29, colide elasticamente com a barra. (a) Que grandezas são conservadas na colisão? (b) Qual deve ser a massa do taco para que ele fique em repouso após a colisão?

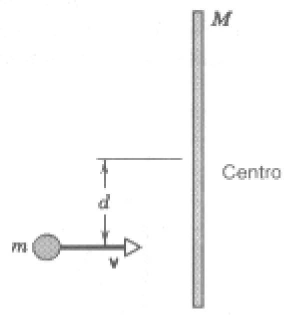


Fig. 29 Problema 21.

(Pág. 270)

Solução.

(a) Ocorre conservação da energia cinética (colisão elástica), do momento linear total (ausência de força externa resultante) e do momento angular total (ausência de torque externo resultante).

(b) Como o taco não colide no centro de massa da barra, após a colisão haverá movimento de translação do centro de massa da barra (V) associado ao movimento de rotação da barra em torno de seu centro de massa (ω). Aplicando-se a conservação do momento linear:

$$P_0 = P$$

$$mv = MV$$

$$V^2 = \frac{m^2 v^2}{M^2} \qquad (1)$$

Aplicando-se a conservação da energia cinética:

$$K_0 = K$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mv^2 = MV^2 + \frac{ML^2}{12}\omega^2 \qquad (2)$$

Aplicando-se a conservação do momento angular:

$$L_0 = L$$

$$mvd = I\omega$$

$$mvd = \frac{ML^2}{12}\omega$$

$$\omega^2 = \frac{12^2 m^2 v^2 d^2}{M^2 L^4} \qquad (3)$$

Substituindo-se (1) e (3) em (2):

$$mv^2 = M\frac{m^2 v^2}{M^2} + \frac{ML^2}{12}\frac{12^2 m^2 v^2 d^2}{M^2 L^4}$$

$$1 = \frac{mv}{M} + \frac{12md^2}{ML^2}$$

$$ML^2 = m\left(L^2 + 12d^2\right)$$

$$\boxed{m = \frac{ML^2}{L^2 + 12d^2}}$$

[Início]

23. Um jogador de bilhar dá uma tacada em uma bola inicialmente em repouso. O taco é sustentado na horizontal à distância *h* acima da linha do centro, como mostra a Fig. 31. A bola inicia seu movimento com velocidade v_0 e, eventualmente, adquire a velocidade final 9 $v_0/7$, por causa desse tipo de tacada. Mostre que $h = 4R/5$, sendo *R* o raio da bola.

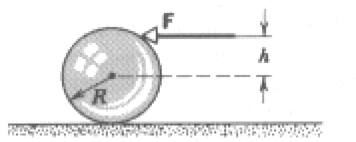
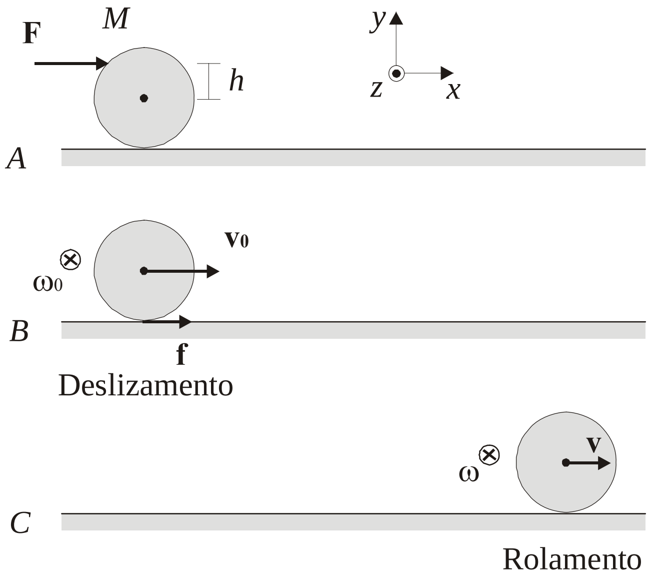


Fig. 31 Problema 23.

(Pág. 270)

Solução.

Considere o seguinte esquema da situação, que está invertido em relação à Fig. 31.



Dividimos o problema em três estados. O estado *A* refere-se ao instante em que a bola recebe a tacada, *B* refere-se ao instante imediatamente após a tacada, em que a bola adquire velocidade $\mathbf{v_0}$ e desliza sobre a mesa e *C* é quando a bola, após deslizar certa distância sobre a mesa, possui velocidade **v** e rola sobre a mesa. O movimento de translação gerado em *B* é o resultado do impulso (Δ**P**, em que **P** é o momento linear da bola) da força (**F**) aplicada em *A*.

$$\Delta P = P_B - P_A = Mv_0 - 0 = F\Delta t$$

$$F\Delta t = Mv_0 \qquad (1)$$

A mesma análise pode ser feita para o movimento de rotação da bola, em que *L* é o momento angular, *I* é o momento de inércia e ω_0 é a velocidade angular inicial da bola:

$$\Delta L = L_B - L_A = I\omega_0 - 0 = \tau\Delta t$$

$$\frac{2MR^2}{5}\omega_0 = -Fh\Delta t$$

$$F\Delta t = -\frac{2MR^2\omega_0}{5h} \qquad (2)$$

O sinal negativo que aparece em (2) refere-se ao sentido do torque que a força **F** exerce sobre a bola. Igualando-se (1) e (2):

$$Mv_0 = -\frac{2MR^2\omega_0}{5h}$$

$$\omega_0 = -\frac{5hv_0}{2R^2} \qquad (3)$$

Vamos analisar agora a translação da bola desde o estado *B* até o estado *C*:

$$\sum F_x = Ma_x$$

$$f = Ma$$

$$a = \frac{f}{M} \qquad (4)$$

Movimento de *B* a *C*:

$$v_x = v_{x0} + a_x t$$

A velocidade v_x foi dada no enunciado do problema e a_x é dada pela Eq. (4):

$$\frac{9v_0}{7} = v_0 + \frac{f}{M}t$$

$$ft = \frac{2}{7}Mv_0 \qquad (5)$$

Agora vamos analisar a rotação da bola desde o estado *B* até o estado *C*:

$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

$$fR = \frac{2MR^2}{5}\alpha$$

$$\alpha = \frac{5f}{2MR}$$

Rotação de *B* a *C*:

$$\omega_z = \omega_{z0} + \alpha_z t$$

$$-\frac{9v_0}{7R} = -\frac{5hv_0}{2R^2} + \frac{5f}{2MR}t$$

$$\frac{5ft}{2M} = \frac{5hv_0}{2R} - \frac{9v_0}{7}$$

$$ft = Mv_0\left(\frac{h}{R} - \frac{18}{35}\right) \qquad (6)$$

Igualando-se (5) e (6):

$$\frac{2}{7}Mv_0 = Mv_0\left(\frac{h}{R} - \frac{18}{35}\right)$$

$$\boxed{h = \frac{4}{5}R}$$

[Início]

27. Suponha que o combustível nuclear do Sol se esgote e ele sofra um colapso brusco, transformando-se numa estrela anã branca com diâmetro igual ao da Terra. Supondo que não haja perda de massa, qual seria o seu novo período de rotação, sabendo-se que o atual é de 25 dias? Suponha que o Sol e a anã branca sejam esferas uniformes.

(Pág. 270)

Solução.

Considere o seguinte esquema da situação:

Considerando-se que durante no processo de colapso do Sol não há torques externos atuando sobre ele, o momento angular do sistema é conservado. Logo:

$$L_0 = L$$

$$I_0\omega_0 = I\omega$$

$$\frac{2}{5}MR_0^2 \times \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2}{5}MR^2 \times \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{R_0^2}{T_0} = \frac{R^2}{T}$$

$$T = T_0\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = (25\text{ d})\left[\frac{(6{,}37\times10^6\text{ m})}{(6{,}96\times10^8\text{ m})}\right]^2 = 2{,}09411\cdots\times10^{-3}\text{ d}$$

$$\boxed{T \approx 180\text{ s}}$$

A situação descrita no enunciado deste problema deve realmente ocorrer daqui a muitos milhões de anos.

[Início]

29. Em uma demonstração de aula, um trem elétrico de brinquedo, de massa *m*, é montado em seu trilho em uma roda que pode girar em torno de seu eixo vertical com atrito desprezível (Fig. 32). O sistema está em repouso quando a energia é ligada. O trem atinge a velocidade *v* em relação ao trilho. Qual é a velocidade angular *w* da roda, se a sua massa for *M* e o seu raio, *R*? (Despreze a massa das barbatanas da roda.)

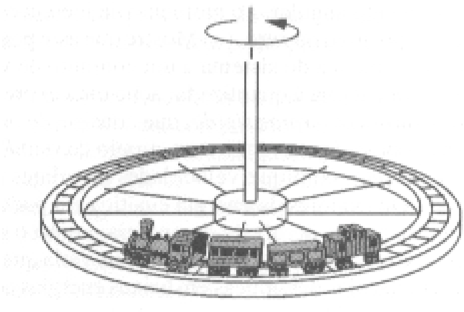
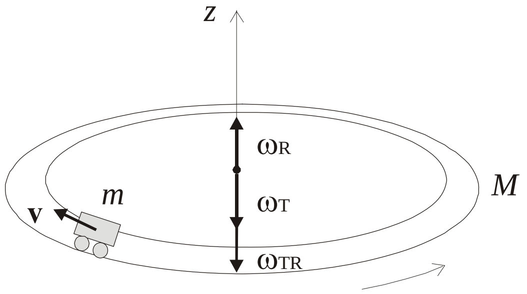


Fig. 32 Problema 29.

(Pág. 270)

Solução.

Considere o seguinte esquema:



Análise da velocidade angular relativa do trem, onde o índice *T* se refere ao trem, *R* à roda:

$$\boldsymbol{\omega}_\mathbf{T} = \boldsymbol{\omega}_\mathbf{TR} + \boldsymbol{\omega}_\mathbf{R}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\mathbf{T} = -\omega_{TR}\mathbf{k} + \omega_R\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\mathbf{T} = (\omega_R - \omega_{TR})\mathbf{k} \qquad (1)$$

Nessas equações, ω_T é a velocidade angular do trem (em relação a um referencial inercial externo), ω_R é a velocidade angular da roda (em relação ao mesmo referencial inercial de ω_T) e ω_{TR} é a velocidade angular do trem em relação à roda). Na ausência de torques externos, o momento angular do sistema é conservado:

$$\mathbf{L_0} = \mathbf{L}$$

$$0 = \mathbf{L_T} + \mathbf{L_R}$$

$$0 = I_T\boldsymbol{\omega}_\mathbf{T} + I_R\boldsymbol{\omega}_\mathbf{R}$$

$$MR^2\boldsymbol{\omega}_\mathbf{R} = -mR^2\boldsymbol{\omega}_\mathbf{T} \qquad (2)$$

Substituindo-se (1) em (2)

$$M\omega_R\mathbf{k} = -m\omega_R\mathbf{k} + m\omega_{TR}\mathbf{k}$$

$$M\omega_R = -m\omega_R + m\frac{v}{R}$$

$$\boxed{\omega_R = \frac{mv}{(m+M)R}}$$

[Início]

31. Uma roda cujo momento de inércia é de 1,27 kg.m2 gira com velocidade angular de 824 rev/min em torno de um eixo de momento de inércia desprezível. Uma segunda roda, de momento de inércia de 4,85 kg.m2, inicialmente em repouso, é acoplada bruscamente ao mesmo eixo. (a) Qual será a velocidade angular da combinação de eixo e rodas? (b) Qual é a fração da energia cinética original perdida?

(**Pág. 271**)

Solução.

(a) Como não existem torques externos sobre o sistema, o momento angular em *z* (ortogonal ao plano das rodas) é conservado:

$$L_{z0} = L_z$$

$$l_{1,0} + l_{2,0} = l_1 + l_2$$

$$\omega_{1,0} I_1 + 0 = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2$$

Como a velocidade final das duas rodas é igual, temos:

$$\omega_{1,0} I_1 = \omega I_1 + \omega I_2$$

$$\omega = \frac{\omega_{1,0} I_1}{I_1 + I_2} = 170,993\cdots \text{ rev/min} \qquad (1)$$

$$\boxed{\omega \approx 171 \text{ rev/min}}$$

(b)

$$f = \frac{K_0 - K}{K} = \frac{\frac{1}{2} I_1 \omega_{1,0}^2 - \frac{1}{2}\left(I_1 + I_2\right)\omega^2}{\frac{1}{2} I_1 \omega_{1,0}^2} \qquad (2)$$

Substituindo-se (1) em (2):

$$f = \frac{I_1 \omega_{1,0}^2 - \left(I_1 + I_2\right)\dfrac{\omega_{1,0}^2 I_1^2}{\left(I_1 + I_2\right)^2}}{I_1 \omega_{1,0}^2} = \frac{I_1 - \dfrac{I_1^2}{\left(I_1 + I_2\right)}}{I_1} = \frac{I_1^2 + I_1 I_2 - I_1^2}{I_1\left(I_1 + I_2\right)} = \frac{I_1 I_2}{I_1\left(I_1 + I_2\right)}$$

$$f = \frac{I_2}{I_1 + I_2} = 0,79248\cdots$$

$$\boxed{f \approx 0,792}$$

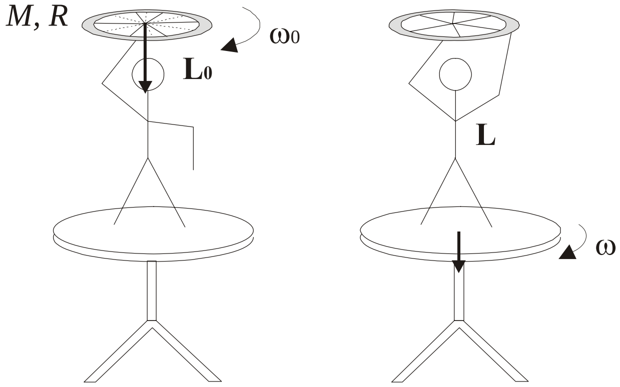
[Início]

32. Uma roda de bicicleta tem um aro fino de 36,3 cm de raio e 3,66 kg de massa. As massas das barbatanas e do centro e também o atrito no eixo são desprezíveis. Um homem, de pé em uma plataforma que gira sem atrito em torno de seu eixo, sustenta a roda acima sua cabeça segurando o eixo na posição vertical. A plataforma está inicialmente em repouso e a roda, vista de cima, gira no sentido horário com velocidade angular de 57,7 rad/s. O momento de inércia do sistema (plataforma + homem + roda) em torno do eixo de rotação comum é de 2,88 kg.m^2. (a) O homem pára subitamente a rotação da roda em relação à plataforma, com a mão. Determine a nova velocidade angular do sistema (módulo, direção e sentido). (b) A experiência é repetida, introduzindo-se atrito no eixo da roda (a plataforma continua a girar sem atrito). O homem segura a roda da mesma maneira e esta, começando com a mesma velocidade angular inicial (57,7 rad/s), vai gradualmente ao repouso. Descreva o que acontece ao sistema, dando tanta informação quantitativa quanto os dados permitam.

(Pág. 271)

Solução.

(a) Considere o esquema a seguir:



Como não existe atrito nos eixos de rotação, isto implica em que não haja torques externos no sistema plataforma + homem + roda. Com isso o momento angular total do sistema é conservado:

$$\mathbf{L_0} = \mathbf{L} \quad (1)$$

$$\mathbf{L_0} = \mathbf{L}_{\text{Plat},0} + \mathbf{L}_{\text{Hom},0} + \mathbf{L}_{\text{Roda},0} = 0 + 0 - I_{\text{Roda}}\omega_0\mathbf{k}$$

Na situação inicial $\mathbf{L_0}$ aponta verticalmente para baixo, devido ao movimento de rotação da roda (regra da mão direita). Sendo M a massa e R o raio da roda, o momento de inércia da roda (na realidade um aro) é MR^2 (ver Fig. 9, pág. 234). Logo:

$$\mathbf{L_0} = -MR^2\omega_0\mathbf{k} \quad (2)$$

O momento angular final vale:

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

Substituindo-se (2) e (3) em (1):

$$-MR^2\omega_0\mathbf{k} = I\boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{MR^2\omega_0}{I}\mathbf{k} = -(9,6622\cdots\text{ rad/s})\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\omega} \approx -(9,66\text{ rad/s})\mathbf{k}$$

Como o momento angular do sistema deve ser conservado, isto implica em que o sentido da rotação deve permanecer idêntico ao inicial, ou seja, sentido horário quando visto de cima para baixo.

(b) A força de atrito que age entre o eixo e a roda tende a freia-la, o que implica num torque sobre a roda que possui o sentido +**k**. A terceira lei de Newton exige que um mesmo torque com o sentido contrário (−**k**) deve ser aplicado ao eixo e, consequentemente, sobre o homem e a plataforma. Estes começam a girar no mesmo sentido de rotação da roda e, portanto, possuem velocidade angular negativa. A velocidade angular final do sistema após a roda não mais girar em relação ao homem deve satisfazer à conservação do momento angular, porém não à conservação da energia mecânica, que diminui. Uma parte da energia cinética inicial do sistema é convertida principalmente em calor, o que aumenta ligeiramente a temperatura do sistema.

[Início]

35. Um disco uniforme de massa M e raio R gira com velocidade angular ω_0 em torno de um eixo horizontal que passa por seu centro. (a) Determine a energia cinética e o momento angular do disco. (b) Um pedaço de massa *m* quebra na beirada do disco e sobre verticalmente acima do ponto do qual se desprendeu (Fig. 33). Até que altura ele sobe, antes de começar a cair? (c) Qual a velocidade angular final do disco quebrado?

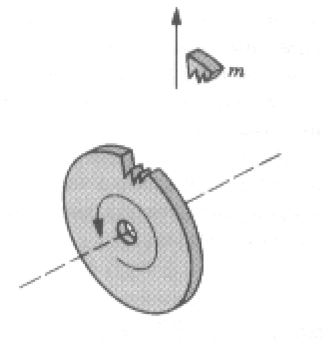


Fig. 33 Problema 35.

(Pág. 271)

Solução.

(a) Energia cinética:

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega_0^2$$

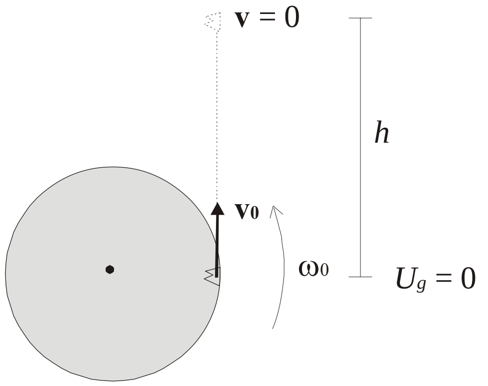
$$\boxed{K=\frac{MR^2\omega_0^2}{4}}$$

Módulo do momento angular:

$$L=I\omega=\frac{MR^2}{2}\omega_0$$

$$\boxed{L=\frac{MR^2\omega_0}{2}}$$

(b) Para que o pedaço de massa *m* suba verticalmente para cima após desprender-se do disco, o local da quebra deve ser tal como mostrado no esquema a seguir:



Aplicando-se o princípio da conservação da energia mecânica ao pedaço de disco *m*:

$$E_0=E$$

$$K_0+U_{g0}=K+U_g$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2+0=0+mgh$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Mas:

$$v_0 = \omega_0 R$$

Logo:

$$\boxed{h = \frac{\omega_0^2 R^2}{2g}}$$

(c) A partir do momento em que o pedaço de disco *m* começa a subir, a força da gravidade exerce torque sobre o mesmo em relação ao eixo de rotação e, o momento angular não se conserva. No entanto, pode-se aplicar a conservação do momento angular aos instantes antes da quebra e imediatamente após a quebra (quando o pedaço de disco ainda não se separou do disco), pois o torque gravitacional só atuará a partir daí.

$$L_0 = L$$

$$L_{\text{Disco}} = L_{\text{Disco quebrado}} + L_{\text{Pedaço de disco}}$$

Imediatamente após a quebra o pedaço *m* tem a mesma velocidade angular do disco. Também nesse instante a soma do momento de inércia do disco quebrado e do pedaço é igual ao momento de inércia do disco intacto (isso ocorre devido ao pedaço ainda não ter se separado do disco):

$$I_0\omega_0 = I_{\text{Disco quebrado}}\,\omega + I_{\text{Pedaço}}\,\omega$$

$$I_0\omega_0 = \left(I_{\text{Disco quebrado}} + I_{\text{Pedaço}}\right)\omega$$

$$I_0\omega_0 = I_0\omega$$

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

O que ocorre com o pedaço de disco a partir da separação não mais interfere no comportamento do disco.

[Início]

40. Se as calotas de gelo dos pólos da Terra derretessem e a água voltasse aos oceanos, eles ficariam 30 m mais profundos. Qual seria o efeito disso na rotação da Terra? Faça uma estimativa da mudança na duração do dia. (Existe atualmente uma preocupação com o aquecimento da atmosfera, provocado pela poluição industrial, que poderia levar a isto.)

(Pág. 272)

Solução.

[Início]