

## PROBLEMAS RESOLVIDOS DE FÍSICA

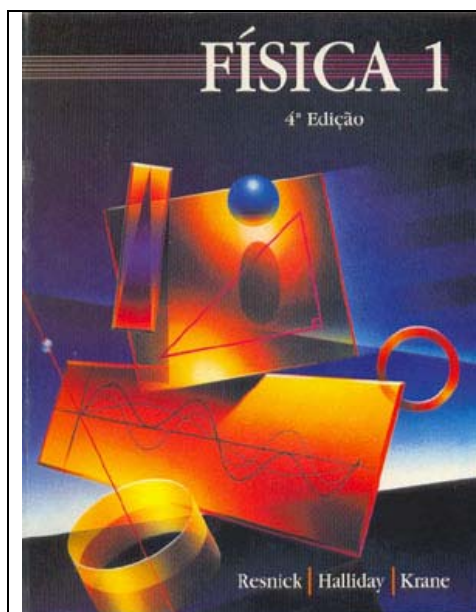
Prof. Anderson Coser Gaudio

Departamento de Física – Centro de Ciências Exatas – Universidade Federal do Espírito Santo

<http://www.cce.ufes.br/anderson>

[anderson@npd.ufes.br](mailto:anderson@npd.ufes.br)

Última atualização: 07/12/2005 12:37 H



RESNICK, HALLIDAY, KRANE, FÍSICA, 4.ED.,  
LTC, RIO DE JANEIRO, 1996.

### FÍSICA 1

### Capítulo 12 - Dinâmica da Rotação

#### Problemas

01	02	03	04	05	<u>06</u>	07	<u>08</u>	09	10
11	12	<u>13</u>	<u>14</u>	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	<u>28</u>	<u>29</u>	30
31	32	33	<u>34</u>	35	<u>36</u>	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	<u>50</u>
<u>51</u>	52	<u>53</u>	<u>54</u>	55	56	<u>57</u>	58	59	60

**Problemas Resolvidos**

6. A Fig. 36 mostra um bloco uniforme de massa  $M$  e arestas de comprimento  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Calcule a sua inércia rotacional em torno de um eixo que passe em um vértice e seja perpendicular à face maior do bloco. (Dica: Veja a Fig. 9.)

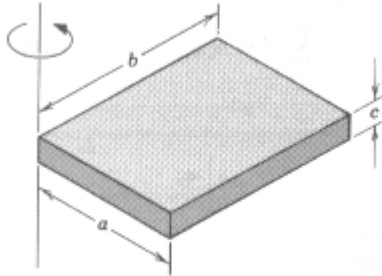


Fig. 36 Problema 6.

(Pág. 247)

**Solução.**

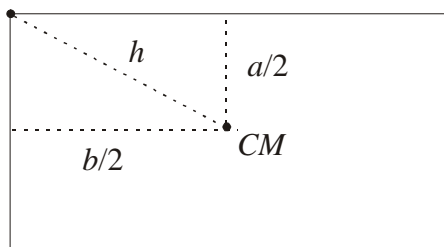
A Fig. 9 mostra que o momento de inércia de um bloco, semelhante ao da Fig. 36, em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa e paralelo ao eixo mostrado na Fig. 36 é dado por:

$$I_{CM} = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}$$

Para descobrir o momento de inércia do bloco em relação ao eixo que passa pelo vértice basta aplicar o teorema do eixos paralelos:

$$I = I_{CM} + Mh^2$$

Considere o seguinte esquema, em que  $h$ , a distância de separação entre os dois eixos, é dada pelo teorema de Pitágoras:



Logo:

$$I = \frac{M(a^2 + b^2)}{12} + M \left[ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right]$$

$$I = \frac{M(a^2 + b^2)}{3}$$

Como esperado,  $I > I_{CM}$ . Quando o eixo está localizado no vértice do bloco a distribuição geral de sua massa é mais afastada do eixo quando comparada ao eixo passando pelo centro de massa.

[\[Início\]](#)

8. Duas partículas, cada uma com massa  $m$ , estão unidas uma a outra e a um eixo de rotação por duas hastes, cada uma com comprimento  $L$  e massa  $M$ , conforme a Fig. 37. O conjunto gira em torno do eixo de rotação com velocidade angular  $\omega$ . Obtenha uma expressão algébrica para (a) a inércia rotacional do conjunto em torno de  $O$  e (b) a energia cinética de rotação em torno de  $O$ .

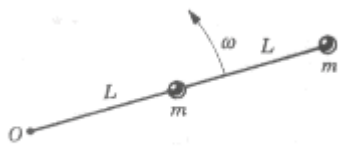
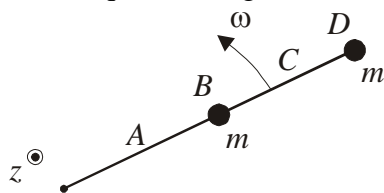


Fig. 37 Problema 8.

(Pág. 247)

**Solução.**

Considere o esquema a seguir:



(a) O momento de inércia total do conjunto vale:

$$I = I_{\text{Barra A}} + I_{\text{Bola B}} + I_{\text{Barra C}} + I_{\text{Bola D}}$$

Podemos tratar as barras A e C como sendo apenas uma barra E de comprimento  $2L$  e massa  $2M$ :

$$I = I_{\text{Barra E}} + I_{\text{Bola B}} + I_{\text{Bola D}} \tag{1}$$

O momento de inércia da barra E é (conferir Fig. 9, pág. 234):

$$I_{\text{Barra E}} = \frac{2M(2L)^2}{3} = \frac{8ML^2}{3} \tag{2}$$

Os momentos de inércia devido às bolas valem:

$$I_{\text{Bola B}} = mL^2 \tag{3}$$

$$I_{\text{Bola D}} = m(2L)^2 = 4mL^2 \tag{4}$$

Substituindo-se (2), (3) e (4) em (1):

$$I = \frac{8ML^2}{3} + mL^2 + 4mL^2$$

$$I = \left( 5m + \frac{8M}{3} \right) L^2 \tag{5}$$

(b) A energia cinética do sistema vale:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{6}$$

Substituindo-se (5) em (6):

$$K = \left( \frac{5m}{2} + \frac{4M}{3} \right) L^2 \omega^2$$

[\[Início\]](#)

- 13.** Neste problema desejamos calcular a inércia rotacional de um disco de massa  $M$  e raio  $R$  em torno de um eixo que passa através de seu centro, perpendicularmente à sua superfície. Considere um elemento de massa  $dm$  na forma de um anel de raio  $r$  e largura  $dr$  (veja a Fig. 39). (a) Qual é a massa  $dm$  desse elemento, escrita como fração da massa total  $M$  do disco? Qual é a inércia rotacional  $dI$  desse elemento? (c) Integre o resultado da parte (b) para encontrar a inércia rotacional do disco como um todo.

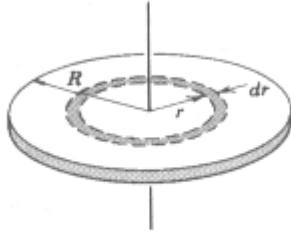


Fig. 39 Problema 13.

(Pág. 248)

**Solução.**

- (a) O elemento de massa  $dm$  pode ser encontrado partindo-se da densidade superficial de massa  $\beta$ , supostamente uniforme.

$$\beta = \frac{M}{\pi R^2} = \frac{dm}{2\pi r dr}$$

Logo:

$$\boxed{\frac{dm}{M} = \frac{2r dr}{R^2}}$$

- (b) A inércia rotacional de um anel de raio  $r$  e massa  $dm$  é dada por:

$$dI = r^2 dm$$

Utilizando-se o resultado do item (a), temos:

$$dI = r^2 \frac{2Mr dr}{R^2}$$

$$\boxed{dI = \frac{2Mr^3 dr}{R^2}}$$

- (c)

$$I = \int dI = \int_0^R \frac{2Mr^3 dr}{R^2} = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4}$$

$$\boxed{I = \frac{MR^2}{2}}$$

[\[Início\]](#)

- 14.** Neste problema, utilizamos o resultado do problema anterior para a inércia rotacional de um disco para calcular a inércia rotacional de uma esfera maciça uniforme de massa  $M$  e raio  $R$  em torno de um eixo que passe através de seu centro. Considere um elemento  $dm$  da esfera na forma de um disco de espessura  $dz$  à altura  $z$  do centro (veja a Fig. 40). (a) Quando escrita em fração da massa total  $M$ , qual é a massa  $dm$  do elemento? (b) Considerando-se o elemento como

um disco, qual é a sua inércia rotacional  $dI$ ? (c) Integre o resultado de (b) sobre a esfera toda para encontrar a inércia rotacional da esfera.

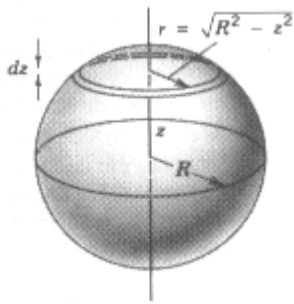


Fig. 40 Problema 14.

(Pág. 248)

### Solução.

(a) O elemento de massa  $dm$  pode ser encontrado partindo-se da densidade volumétrica de massa  $\rho$ , supostamente uniforme.

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{dm}{\pi r^2 dz}$$

Logo:

$$\frac{dm}{M} = \frac{3(R^2 - z^2) dz}{4R^3}$$

(b) A inércia rotacional de um disco de raio  $r$  e massa  $dm$  é dada por:

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm$$

Utilizando-se o resultado do item (a), temos:

$$dI = \frac{1}{2} r^2 \frac{3Mr^2 dz}{4R^3}$$

$$dI = \frac{3M(R^2 - z^2)^2 dz}{8R^3}$$

(c)

$$I = \int dI = \int_{-R}^{+R} \frac{3M(R^2 - z^2)^2 dz}{8R^3} = \frac{3M}{8R^3} 2 \int_0^R (R^2 - z^2)^2 dz$$

$$I = \frac{3M}{8R^3} 2 \left( R^4 z - \frac{2R^2 z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right) \Big|_0^R = \frac{3M}{4R^3} \left( R^5 - \frac{2R^5}{3} + \frac{R^5}{5} \right) = \frac{3M}{4R^3} \times \frac{8R^5}{15}$$

$$I = \frac{2MR^2}{5}$$

[\[Início\]](#)

28. A Fig. 45 mostra dois blocos, cada um de massa  $m$ , suspensos nas extremidades de uma haste rígida e sem massa de comprimento  $L_1 + L_2$ , com  $L_1 = 20,0$  cm e  $L_2 = 80,0$  cm. A haste é mantida na posição horizontal mostrada na figura e então liberada. Calcule as acelerações lineares dos dois blocos quando eles começarem a mover-se.

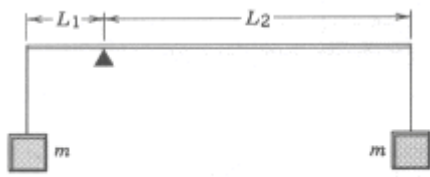
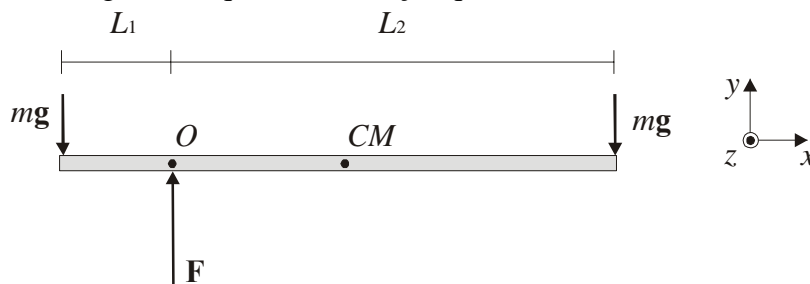


Fig. 45 Problema 28.

(Pág. 249)

**Solução.**

Considere o seguinte esquema das forças que atuam sobre a haste:



Como a haste é rígida as acelerações angulares ( $\alpha$ ) de ambos os blocos serão iguais. Suas acelerações lineares serão dadas por:

$$a_1 = \alpha L_1 \tag{1}$$

$$a_2 = \alpha L_2 \tag{2}$$

A aceleração angular é calculada por meio da segunda lei de Newton:

$$\sum \tau = I\alpha$$

Torques em  $z$ :

$$L_1 mg - L_2 mg = I_0 \alpha$$

$$\alpha = \frac{mg(L_1 - L_2)}{I_0} \tag{3}$$

O momento de inércia da barra em relação a um eixo ortogonal ao seu comprimento e que passa pelo seu centro de massa é  $ml^2/12$ . O momento de inércia da barra em relação ao eixo atual é calculado por meio da aplicação do teorema dos eixos paralelos.

$$I_0 = I_{CM} + mh^2$$

$$I_0 = \frac{m(L_1 + L_2)^2}{12} + m\left(\frac{L_2 - L_1}{2}\right)^2$$

$$I_0 = \frac{m}{3}(L_1^2 - L_1 L_2 + L_2^2) \tag{4}$$

Substituindo-se (4) em (3):

$$\alpha = \frac{3g(L_1 - L_2)}{(L_1^2 - L_1 L_2 + L_2^2)} = -33,9576 \dots \text{rad/s} \tag{5}$$

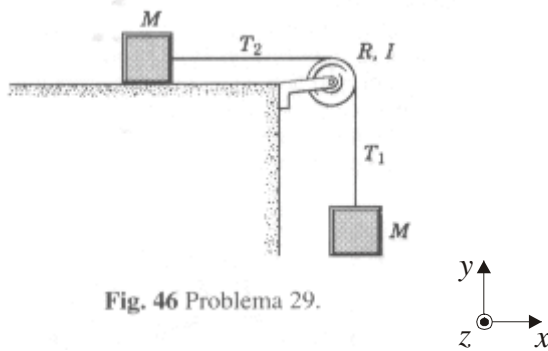
O sinal negativo de  $\alpha$  indica que o sentido da aceleração da barra é horário. Para o cálculo de  $a_1$  e  $a_2$ , a partir das Eqs. (1) e (2), o sinal de  $\alpha$  não é relevante.

$$a_1 \approx 6,79 \text{ m/s}$$

$$a_2 \approx 27,2 \text{ m/s}$$

[Início]

**29.** Dois blocos idênticos, cada um com massa  $M$ , são ligados por uma corda leve que passa sobre uma polia de raio  $R$  e inércia rotacional  $I$  (Fig. 46). A corda não escorrega sobre a polia e não se sabe se existe atrito ou não entre o plano e o bloco que escorrega. Quando esse sistema é solto, verifica-se que a polia gira do ângulo  $\theta$  durante o intervalo de tempo  $t$  e a aceleração dos blocos é constante. (a) Qual a aceleração angular da polia? (b) Qual a aceleração dos dois blocos? (c) Quais as trações nas porções superior e inferior da corda? Expresse todas as respostas em termos de  $M$ ,  $I$ ,  $R$ ,  $\theta$ ,  $g$  e  $t$ .



(Pág. 249)

**Solução.**

(a) A polia percorre um ângulo  $-\theta$  num tempo  $t$ , logo:

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$-\theta - 0 = 0 + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\alpha = -\frac{2\theta}{t^2}$$

(1)

O sinal negativo de  $\alpha$  está em acordo com o referencial adotado.

(b) A aceleração do bloco sobre a superfície horizontal vale:

$$a = -\alpha R$$

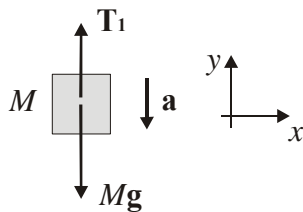
(2)

O sinal negativo corrige o sinal da aceleração em  $x$  (positiva) em relação ao sinal da aceleração angular da polia (negativa). Substituindo-se (1) em (2):

$$a = -\left(-\frac{2\theta}{t^2}\right)R$$

$$a = \frac{2\theta R}{t^2}$$

(c) Esquema de forças sobre o bloco 1 (suspense pelo fio):



Forças no bloco 1 em y:

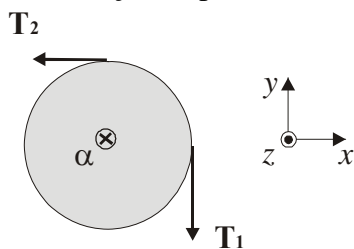
$$\sum F_y = Ma_y$$

$$T_1 - Mg = M \left( -\frac{2\theta R}{t^2} \right)$$

$$\boxed{T_1 = M \left( g - \frac{2\theta R}{t^2} \right)}$$

(3)

Esquema de forças na polia:



Torques na polia em z:

$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

$$-RT_1 + RT_2 = I\alpha$$

(4)

Substituindo-se (2) e (3) em (4)

$$-RM \left( g - \frac{2\theta R}{t^2} \right) + RT_2 = I \left( -\frac{2\theta}{t^2} \right)$$

$$T_2 = -\frac{2\theta I}{Rt^2} + Mg - \frac{2MR\theta}{t^2}$$

$$\boxed{T_2 = Mg - \frac{2\theta}{t^2} \left( MR + \frac{I}{R} \right)}$$

[\[Início\]](#)

**34.** Uma esfera oca uniforme gira em torno de mancais verticais sem atrito (Fig. 47). Uma corda de massa desprezível passa pelo equador da esfera e sobre uma polia; ela está presa a um pequeno objeto que pode cair livremente sob a influência da gravidade. Qual será a velocidade do objeto após este ter caído a distância  $h$  a partir do repouso?



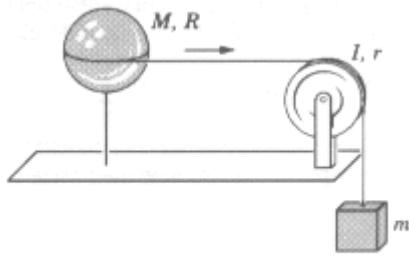


Fig. 47 Problema 34.

(Pág. 250)

**Solução.**

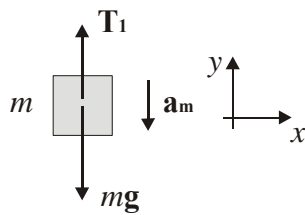
A variação da energia cinética do bloco  $m$  é igual ao trabalho gravitacional:

$$W_g = \Delta K = K - K_0$$

$$mgh - T_1 h = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v^2 = 2h \left( g - \frac{T_1}{m} \right) \tag{1}$$

Forças no corpo  $m$  em  $y$ :

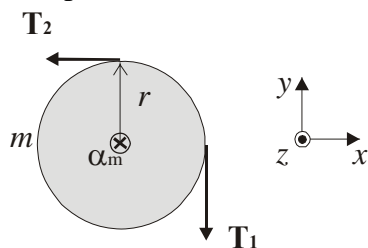


$$\sum F_y = M a_y$$

$$T_1 - mg = m a_m$$

$$\frac{T_1}{m} = a_m + g \tag{2}$$

Torques na polia em  $z$ :



$$\sum \tau_z = I \alpha_z$$

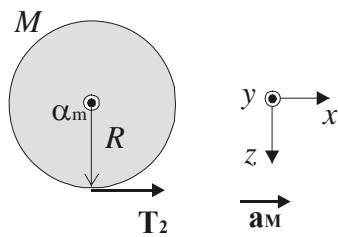
$$r T_2 - r T_1 = I \alpha$$

$$T_2 = T_1 + \frac{I \alpha}{r} \tag{3}$$

Substituindo-se (2) em (3) e  $\alpha$  por  $a_m/r$ :

$$T_2 = m a_m + mg + \frac{I a_m}{r^2} \tag{4}$$

Torques na casca esférica:



$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

$$RT_2 = I\alpha_M$$

$$RT_2 = \frac{2}{3}MR^2 \frac{a_M}{R}$$

$$T_2 = \frac{2}{3}Ma_M \tag{5}$$

Substituindo-se (5) em (4):

$$\frac{2}{3}Ma_M = ma_m + mg + \frac{Ia_m}{r^2} \tag{6}$$

Na Eq. (6),  $a_M$  é a aceleração linear do fio ligado à casca esférica, está na coordenada  $x$  e é positivo.  $a_m$  é a aceleração linear do bloco  $m$ , está na coordenada  $y$  e é negativo. Portanto:

$$a_M = -a_m \tag{7}$$

Substituindo-se (7) em (6):

$$-\frac{2}{3}Ma_m = ma_m + mg + \frac{Ia_m}{r^2}$$

$$a_m \left( \frac{2}{3}M + m + \frac{I}{r^2} \right) = -mg$$

$$a_m = -\frac{g}{\left( \frac{2M}{3m} + 1 + \frac{I}{mr^2} \right)} \tag{8}$$

Substituindo-se (8) em (2):

$$\frac{T_1}{m} = g - \frac{g}{\left( \frac{2M}{3m} + 1 + \frac{I}{mr^2} \right)} \tag{9}$$

Substituindo-se (9) em (1):

$$v^2 = 2h \left[ g - g + \frac{g}{\left( \frac{2M}{3m} + 1 + \frac{I}{mr^2} \right)} \right]$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\left( \frac{2M}{3m} + 1 + \frac{I}{mr^2} \right)}}$$

[\[Início\]](#)

36. Um corpo rígido é formado por três barras finas idênticas, presas na forma de uma letra *H* (Fig. 48). O corpo pode girar livremente em torno de um eixo horizontal que passa por uma das pernas do *H*. Solta-se esse corpo a partir do repouso, de uma posição na qual o plano do *H* é horizontal. Qual é a velocidade angular do corpo quando o plano do *H* for vertical?

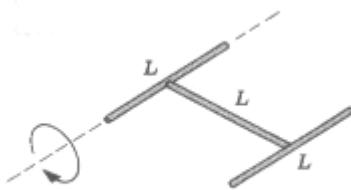
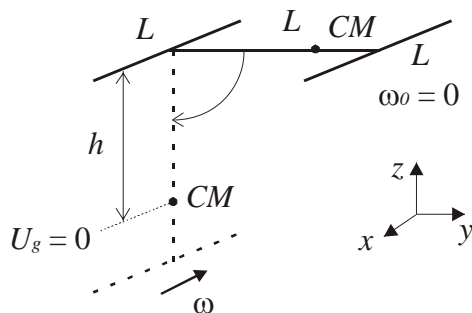


Fig. 48 Problema 36.

(Pág. 250)

**Solução.**

Considere o seguinte esquema da situação, em que *CM* indica o centro de massa das duas barras que efetivamente giram:



Pode-se aplicar o princípio da conservação da energia mecânica aos estados inicial ( $E_0$ ) e final ( $E$ ):

$$\begin{aligned}
 E_0 &= E \\
 K_0 + U_{g0} &= K + U_g \\
 0 + 2mgh &= \frac{1}{2} I \omega^2 + 0 \\
 \omega^2 &= \frac{4mgh}{I} \tag{1}
 \end{aligned}$$

Na Eq. (1),  $m$  é a massa de cada barra,  $I$  é o momento de inércia das barras que giram, sem contar com a barra que está no eixo e  $h$  é a queda sofrida pelo centro de massa das barras que giram. A distância que vai do eixo até o centro de massa das barras que giram vale:

$$\begin{aligned}
 My_{Cm} &= \sum m_i y_i \\
 2my_{Cm} &= m \frac{L}{2} + mL \\
 y_{Cm} &= \frac{3L}{4} = h \tag{2}
 \end{aligned}$$

Momento de inércia do conjunto das barras que giram:

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 + I_2 = \frac{mL^2}{3} + mL^2 \\
 I &= \frac{4mL^2}{3} \tag{3}
 \end{aligned}$$

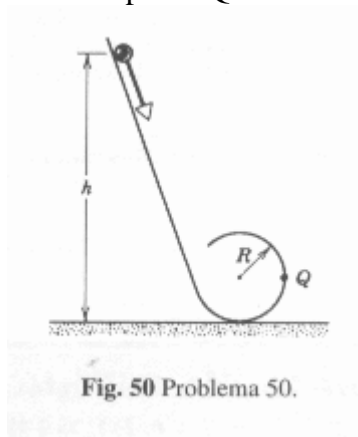
Substituindo-se (2) e (3) em (1):

$$\omega^2 = \frac{4mg \frac{3L}{4}}{\frac{4mL^2}{3}} = \frac{9g}{4L}$$

$$\omega = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

[\[Início\]](#)

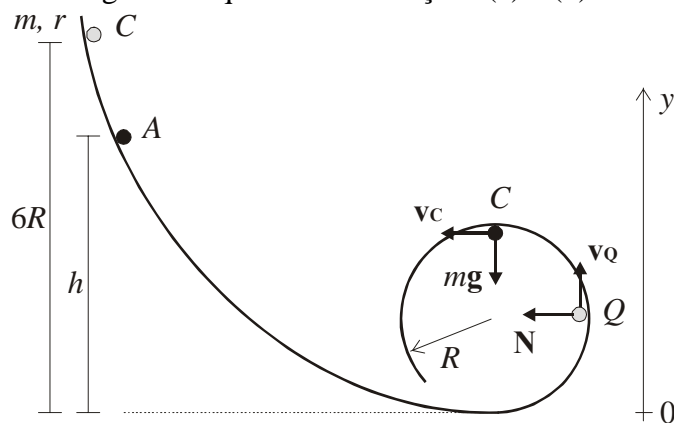
**50.** Uma bolinha compacta de massa  $m$  e raio  $r$  rola sem deslizar ao longo do trilho em curva mostrado na Fig. 50, tendo sido abandonada em repouso em algum ponto da região reta do trilho. (a) De que altura mínima, a partir da base do trilho, a bolinha deve ser solta para que percorra a parte superior da curva? (O raio da curva é  $R$ ; suponha que  $R \gg r$ ). (b) Se a bolinha for solta da altura  $6R$  acima da base do trilho, qual a componente horizontal da força que atua sobre ela no ponto Q?



(Pág. 251)

**Solução.**

Considere o seguinte esquema das situações (a) e (b):



(a) Aplicando-se o princípio da conservação da energia mecânica aos pontos A e C:

$$E_A = E_C$$

$$K_A + U_{gA} = K_C + U_{gC}$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega_C^2 + mg2R$$

Sabendo-se que o momento de inércia de uma esfera sólida de raio  $r$  e massa  $m$  é  $\frac{2mr^2}{5}$  e aplicando-se a relação  $v = \omega r$ :

$$mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2} \frac{2mr^2}{5} \frac{v_C^2}{r^2} + 2mgR$$

$$2gh = v_C^2 + \frac{2v_C^2}{5} + 4gR$$

$$h = \frac{7v_C^2}{10g} + 2R \quad (1)$$

A condição mínima para que a esfera possa dar a volta em torno do círculo de raio  $R$  é que no ponto  $C$  a força centrípeta do movimento circular seja igual ao peso da esfera:

$$F_c = P$$

$$\frac{mv_C^2}{R} = mg$$

$$v_C^2 = gR \quad (2)$$

Substituindo-se (2) em (1):

$$h = \frac{7R}{10} + 2R$$

$$\boxed{h = \frac{27R}{10}}$$

(b) Aplicando-se o princípio da conservação da energia mecânica aos pontos  $B$  e  $Q$ :

$$E_B = E_Q$$

$$K_B + U_{gB} = K_Q + U_{gQ}$$

$$0 + mg6R = \frac{1}{2}mv_Q^2 + \frac{1}{2}I\omega_Q^2 + mgR$$

$$6mgR = \frac{1}{2}mv_Q^2 + \frac{1}{2} \frac{2mr^2}{5} \frac{v_Q^2}{r^2} + mgR$$

$$12gR = v_Q^2 + \frac{2v_Q^2}{5} + 2gR$$

$$10gR = \frac{7v_Q^2}{5}$$

$$v_Q^2 = \frac{50}{7}gR \quad (3)$$

A componente horizontal da força que age na esfera no ponto  $Q$  (força normal,  $N$ ) é a força centrípeta do movimento circular da esfera naquela posição:

$$N = F_c$$

$$N = \frac{mv_Q^2}{R} \quad (4)$$

Substituindo-se (3) em (4):

$$N = \frac{m}{R} \frac{50}{7} gR$$

$$N = \frac{50}{7} mg$$

[Início]

**51.** Um cilindro maciço de comprimento  $L$  e raio  $R$  tem peso  $P$ . Duas cordas são enroladas em torno do cilindro, perto de cada borda, e as pontas das cordas são presas a ganchos no teto. O cilindro é mantido na horizontal com as duas cordas exatamente verticais e então é abandonado (Fig. 51). Ache (a) a tração em cada corda enquanto elas se desenrolam e (b) a aceleração linear do cilindro enquanto ele cai.

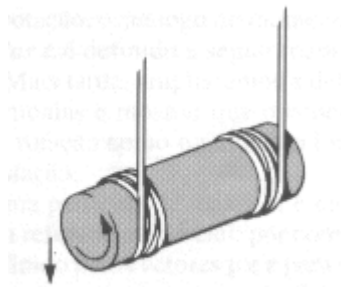
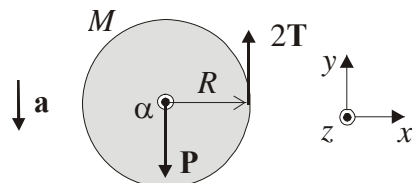


Fig. 51 Problema 51.

(Pág. 251)

**Solução.**

(a) Considere o seguinte esquema das forças que agem sobre o cilindro:



Torques em  $z$ :

$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

$$R \cdot 2T = \frac{MR^2}{2} \left( -\frac{a}{R} \right)$$

$$T = -\frac{Pa}{4g} \tag{1}$$

Análise da translação do cilindro:

$$\sum F_y = Ma_y$$

$$2T - P = \frac{P}{g} a$$

$$a = \frac{g}{P} (2T - P) \tag{2}$$

Substituindo-se (1) em (2):

$$T = -\frac{P}{4g} \frac{g}{P} (2T - P)$$

$$4T = P - 2T$$

$$\boxed{T = \frac{P}{6}}$$

(3)

(b) Substituindo-se (3) em (2):

$$a = \frac{g}{P} \left( 2\frac{P}{6} - P \right) = g \left( \frac{1}{3} - 1 \right)$$

$$\boxed{a = -\frac{2g}{3}}$$

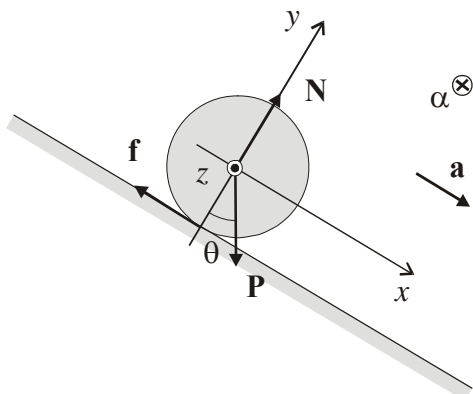
[Início]

**53.** Mostre que um cilindro vai derrapar num plano inclinado com inclinação  $\theta$  se o coeficiente de atrito estático entre o plano e o cilindro for menor do que  $1/3 \tan \theta$ .

(Pág. 251)

**Solução.**

Considere o seguinte esquema da situação:



A condição de rolamento do cilindro é dada por  $a = \alpha R$ , em que  $a$  é a aceleração linear,  $\alpha$  é aceleração angular e  $R$  é o raio do cilindro. A condição para que o cilindro deslize pela rampa ao invés de rolar é que  $a$  seja maior do que o produto  $\alpha R$ :

$$a > \alpha R \tag{1}$$

Agora vamos calcular  $a$  e  $\alpha$  para substituir em (1). Forças em  $y$ :

$$\sum F_y = 0$$

$$N - mg \cos \theta = 0$$

$$N = mg \cos \theta \tag{2}$$

Forças em  $x$ :

$$\sum F_x = ma_x$$

$$P_x - f = ma$$

$$mg \sin \theta - \mu N = ma \tag{3}$$

Substituindo-se (2) em (3):

$$mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta = ma$$

$$a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \quad (5)$$

Torques em relação ao eixo que passa pelo centro de massa do cilindro, em  $z$ :

$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

$$-fR = -\frac{mR^2}{2}\alpha$$

$$\mu mg \cos \theta R = \frac{mR^2}{2}\alpha$$

$$\alpha = \frac{2\mu g \cos \theta}{R} \quad (6)$$

Substituindo-se (5) e (6) em (1):

$$g(\sin \theta - \mu \cos \theta) > \frac{2\mu g \cos \theta}{R} R$$

$$\sin \theta - \mu \cos \theta > 2\mu \cos \theta$$

$$\tan \theta - \mu > 2\mu$$

$$\boxed{\mu < \frac{1}{3} \tan \theta}$$

[Início]

**54.** Um corpo rola horizontalmente, sem deslizar, com velocidade  $v$ . A seguir ele rola para cima em uma rampa até a altura máxima  $h$ . Se  $h = 3v^2/4g$ , que corpo deve ser esse?

(Pág. 251)

### Solução.

Este é um sistema conservativo e, portanto, a energia mecânica é conservada. A estratégia para resolver este problema é descobrir o momento de inércia do corpo e compara-lo com o momento de inércia de corpos conhecidos.

$$E_0 = E$$

$$U_{g0} + K_0 = U_g + K$$

$$0 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh + 0$$

Aplicando-se a condição de rolamento  $v = \omega R$ :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2} = mg\frac{3v^2}{4g}$$

$$m + \frac{I}{R^2} = \frac{3m}{2}$$

$$\boxed{I = \frac{mR^2}{2}}$$

Com este momento de inércia, o corpo pode ser um disco ou um cilindro de massa  $m$  e raio  $R$ .

[Início]



57. Um cilindro maciço de 10,4 cm e massa 11,8 kg parte do repouso e rola sem deslizar uma distância de 6,12 m para baixo do telhado de uma casa, que é inclinado de  $27^\circ$ . (a) Qual a velocidade angular do cilindro em torno de seu eixo, quando ele deixa o telhado? (b) A parede exterior da casa tem 5,16 m de altura. A que distância da parede o cilindro deverá tocar no solo? Veja a Fig. 54.

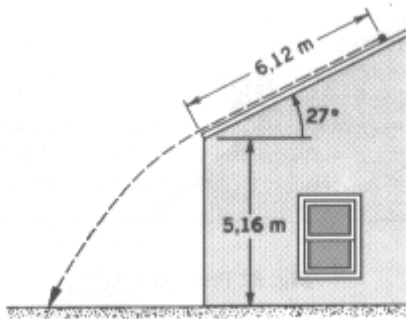
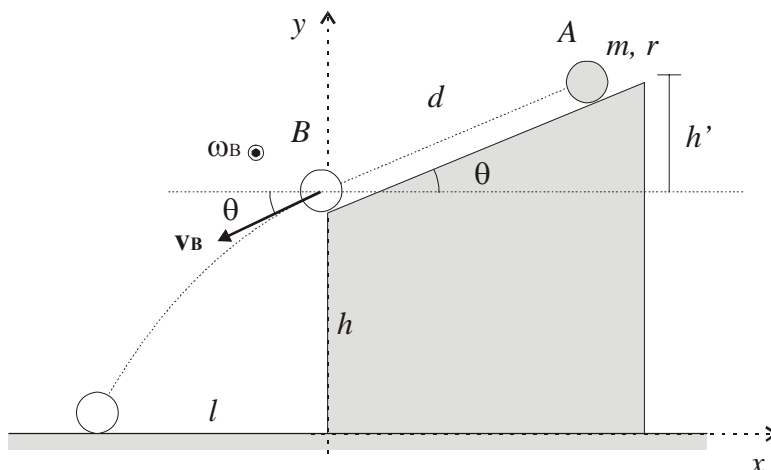


Fig. 54 Problema 57.

(Pág. 251)

**Solução.**

Considere o seguinte esquema da situação:



(a) Aplicando-se o princípio da conservação da energia mecânica do sistema aos estados A e B:

$$E_A = E_B$$

$$K_A + U_{gA} = K_B + U_{gB}$$

$$0 + mg(h + h') = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2 + mgh$$

$$2mgh' = mv_B^2 + I\omega_B^2$$

$$2mgd \text{ sen } \theta = m\omega_B^2 r^2 + \frac{mr^2}{2} \omega_B^2$$

$$2gd \text{ sen } \theta = \frac{3r^2}{2} \omega_B^2$$

$$\omega_B^2 = \frac{4gd \text{ sen } \theta}{3r^2}$$

$$\omega_B = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}gd \sin \theta}}{r} = 57,9655 \dots \text{rad/s} \quad (1)$$

$$\boxed{\omega_B \approx 58,0 \text{ rad/s}}$$

(b) Análise do movimento da esfera do momento em que perde contato com o telhado até tocar o solo. Em  $x$ :

$$x = x_0 + v_x t$$

$$x = 0 - v_B \cos \theta t$$

$$t = -\frac{x}{v_B \cos \theta} \quad (2)$$

Em  $y$ :

$$y - y_0 = v_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$0 - h = -v_B \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3)$$

Substituindo-se (2) em (3):

$$h = \frac{1}{2} g \left( -\frac{x}{v_B \cos \theta} \right)^2 + v_B \sin \theta \left( -\frac{x}{v_B \cos \theta} \right)$$

$$h = \frac{gx^2}{2v_B^2 \cos^2 \theta} - x \tan \theta$$

Como  $v_B = \omega_B r$ , temos:

$$h = \frac{gx^2}{2\omega_B^2 r^2 \cos^2 \theta} - x \tan \theta$$

$$\left( \frac{g}{2\omega_B^2 r^2 \cos^2 \theta} \right) x^2 - (\tan \theta) x - h = 0$$

As raízes desta equação do segundo grau são:

$$x_1 = -4,2108 \dots \text{m}$$

$$x_2 = 7,2079 \dots \text{m}$$

De acordo com o referencial adotado, a coordenada  $x$  onde a esfera toca o solo é negativa. Logo, a distância alcançada pela bola na queda do telhado vale:

$$\boxed{l = 4,21 \text{ m}}$$

[\[Início\]](#)